М 10-8

№ 10.8.

Мы имеем два равенства:

$x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x-y)$

и

$x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x-y)$

Мы можем разделить второе на первое таким образом:

$$\frac{x^{200}-y^{200}}{x^{100}-y^{100}} = \frac{2^{199}(x-y)}{2^{99}(x-y)}$$

$$\frac{x^{200}-y^{200}}{x^{100}-y^{100}} = 2^{100}$$

Отсюда: $x^{200} - y^{200} = 2^{100}(x^{100} - y^{100})$

$$x^{200} - 2^{100}x^{100} = y^{200} - 2y^{100}$$

Наблюдение 1:

Заметим, что в обеих частях равенства коэфициенты при $x$ и $y$ и их степени - идентичны.

Рассмотрим случай, когда обе части равенства равны 0, решим уравнение для любой из частей:

$$x^{200} - 2^{100}x^{100} = 0$$

$$x^{100}(x^{100} - 2^{100}) = 0$$

$x = 0$

или

$x^{100} - 2^{100} = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = -2$

Получив ~~два~~ 3 корня, мы нашли две пары чисел: 1) $x = 0$; $y = 2$

2) $x = 2$; $y = 0$.

Подставив корни в равенство

М 10-8



$x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x-y)$ и выполнив проверку заметим, что пары чисел с корнем $-2$ не дают верного равенства и условию соответствуют всего две пары чисел (1 и 2).

Теперь докажем, что других пар нет.

Заметим из наблюдения 1, что если части равенства 3 не равны 0, то равенство 3 верно только при $|x| = |y|$. $x \neq y$ по усл., значит $x = -y$. Подставим это в равенство

1 и сделаем проверку:

$(-y)^{100} - y^{100} = 0$

$2^{99}(-y - y) = 2^{99}(-2y) = -2^{100}y \neq 0$ (при

$y$ отличном от $0$)

Мы получили противоречие, значит $x \neq -y$ и других пар нет.

Ответ: $x = 2$, $y = 0$; $x = 0$; $y = 2$.

№10.5.

Так как $a$ и $в$ - любые действительные числа, $a + в$ - тоже любое действительное число, аналогично и $a \cdot в$ - любое действительное число.

Так как множество $A$ никак не ограничено (бесконечное), может существовать бесконечное кош-

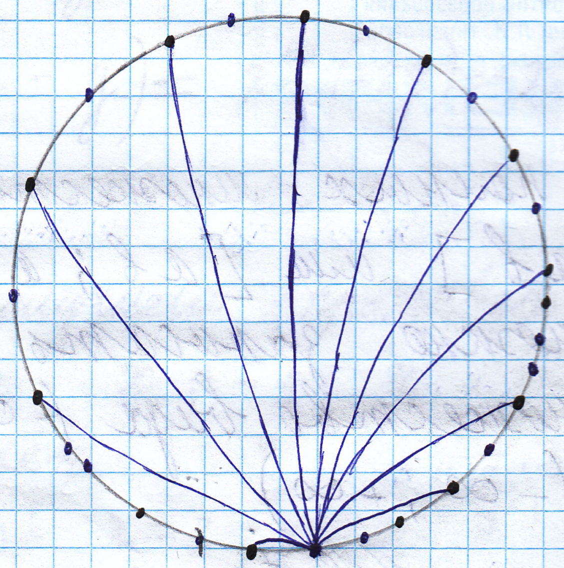
М 10-8



чество полных множеств вида $[a+b; ab]$ или $[ab; a+b]$, это можно записать как одно множество вида $(-\infty; +\infty)$.
Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

№ 10.7.

Построим граф: ребенок - вершина, связь в хорошую пару - ребро, покрасим вершины, обозначающие мальчиков в черный, а обозначающие девочек в синий цвет. Так как каждое ребро соединяет одну чёрную и одну синюю вершины, сумма степеней всех черных вершин равна сумме степеней всех синих вершин.

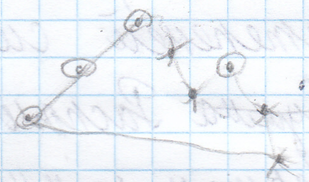


Рассмотрим круг:

девочек − $n$
мальчиков − $n$ $\Rightarrow$ детей поровну, (1)
всего их четное (2)
число $= 2n$.

Между детьми из „хорошей пары" поровну мальчиков и девочек, значит между ними четно количество детей. (3)

М 10-8



Чтобы соблюдались условия 1,2,3, дети могут располагаться только ~~в соответствии~~ таким образом: если в кругу есть два мальчика, стоящие рядом, то там есть и две девочки, стоящие рядом; если есть три мальчика, стоящие рядом, то есть и три девочки, стоящие рядом и т.д., и наоборот.

Это означает, что расположение мальчиков и девочек симметрично друг другу.

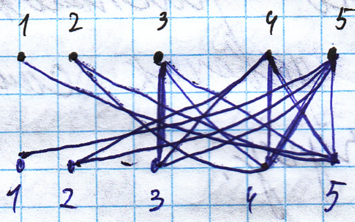
Сумма степеней черных вершин равна сумме степеней синих верш. ~~Сумма~~ Расположение черных вершин симметрично расположению синих верш. пример – рис 2.

=> Если среди вершин одного цвета есть вершина со степенью n, то и среди вершин второго цвета есть вершина со степенью n.

Есть синяя вершина со степенью 10, значит есть и черная со степенью 10, значит есть мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

ч. и т.д.

рис 2.



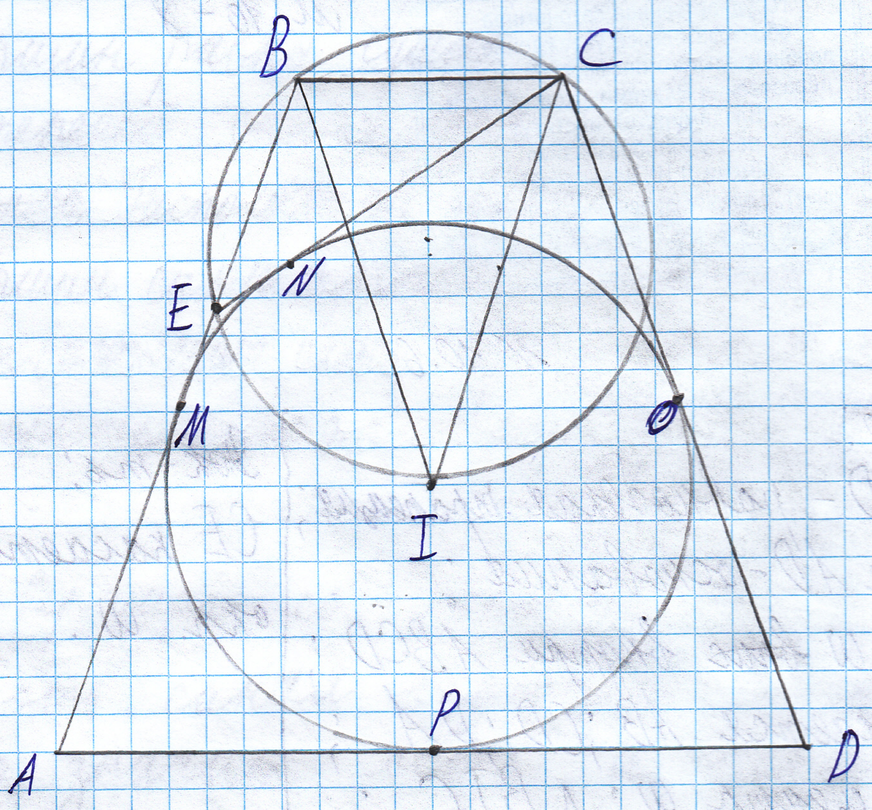
М 10 - 8

№ 10.6.

Дано:
ABCD – равнобокая трапеция;
BC и AD – основания;
окр. ω ~~вписан~~ внутри ABCD;
ω касается AB; CD; DA;
I – центр ω; △BIC;
$\omega_2$ – опис окр. △BIC;
$\omega_2 \cap AB = E$.

Док-ть:
CE касается окр. ω.

Чертеж: см след. стр.




Общеизвестный факт:
Если из точки, лежащей вне окружности, провести две касательные к этой окружности, расстояние от этой точки до первой точки касания будет равно расстоянию от этой точки до второй точки

касания. (отрезки равны).

Поэтому:

$AM = AP$;

$DP = DO$; (1).

$EM = EN$;

$CN = CO$.

? $EC$ - кас

Рассмотрим стороны четырехугольника $AECD$:

$AE = AM + EM$

$EC = EN + CN$

$CD = CO + DO$

$DA = DP + AP$

Теперь рассмотрим сумму противоположных сторон этого четырехуг.:

$AE + CD = AM + EM + CO + DO$

$EC + DA = EN + CN + DP + AP$.

Из равенств 1: $AM + EM + CO + DO = EN + CN + DP + AP$,

значит $AE + CD = EC + DA$.

Если у четырехугольника суммы противоположных сторон равны, в него можно вписать окружность.

Окр. $\omega$ касается сторон $AE$, $CD$, $DA$ четырехугольника $AECD$, значит $\omega$ и есть впис. окр. для $AECD$, значит $\omega$ касается $CE$ ч. и т. д.