

государственное автономное  
образовательное учреждение  
дополнительного профессионального  
образования Владимирской области  
"Владимирский институт  
развития образования  
имени Л.И. Новиковой"

600001 г. Владимир, проспект Ленина, д. 8а

**КАНЦЕЛЯРИЯ**

М-10-8

№ 10.1.

$$f_n(x) = ax^2 + bx + c_n \quad ; n \in [1; \infty]$$

(так как  $a$  и  $b$  не изменяются по усл.)

Найдём корни первого квадратного  
трехчлена:

$$f_1(x) = ax^2 + bx + c_1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac_1 > 0$$

$$x_{1,1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac_1}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac_1}}{2a}$$

Теперь подставим корни по очереди  
в  $f_2(x_1)$ :



$$\begin{aligned}
 f_2(x_{1,1}) &= a \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac_1}}{2a} \right)^2 + b \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac_1}}{2a} \right) + c_2 = \\
 &= \frac{a \cdot (b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac_1} + b^2 - 4ac_1)}{4a^2} + \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac_1}}{2a} + c_2 = \\
 &= \frac{2b^2 - 2b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac_1} + 2b\sqrt{b^2 - 4ac_1} - 4ac_1}{4a} + c_2 =
 \end{aligned}$$

$$= c_2 - c_1$$

$$\begin{aligned}
 f_2(x_{1,2}) &= a \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac_1}}{2a} \right)^2 + b \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac_1}}{2a} \right) + c_2 = \\
 &= \frac{b^2 + 2b\sqrt{b^2 - 4ac_1} + b^2 - 4ac_1 - 2b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac_1}}{4a} + c_2 =
 \end{aligned}$$

$$= c_2 - c_1$$

Заметим, что выбор корня (первого или второго) не влияет на ~~эт~~ конечное значение функции.

$$f_2(x_{1,1}) = f_2(x_{1,2}) = c_2 - c_1$$



Квадратные трёхчлены  $f_1(x), \dots, f_{100}(x)$   
отличаются только свободными чле-  
нами, поэтому функции  $f_n(x_{n-1})$   <sup>$n \in [2, 100]$</sup>  будут  
сокращаться по одному и тому  
же принципу (пример:  $f_2(x_1)$ ).  
И в конечном итоге

$$f_n(x_m) = C_n - C_m.$$

$$\begin{aligned} \text{Получим: } f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100}) = \\ = C_2 - C_1 + C_3 - C_2 + \dots + C_{100} - C_{99} + C_1 - C_{100}. \end{aligned}$$

Заметим, что слагаемые  $C_1, \dots, C_{100}$   
встречаются по два раза, значит  
~~они со~~ и с противоположными  
знаками, значит они сократятся  
( $C_n - C_n = 0$ ), значит их сумма



75

будет равна 0.

Ответ:  $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100}) = 0$ .

N 10.3.

Дано:

$ABCD$  - выпуклый четырех-  
угольник;  $L \in AB$ ;  $K \in AL$ ;

$N \in CD$ ;  $M \in CN$ ;

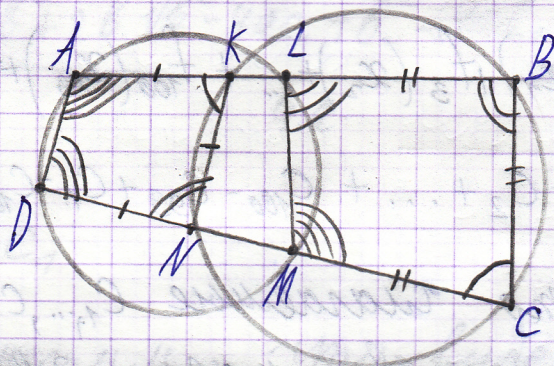
$AK = KN = DN$ ;  $BL = BC = CM$ ;

$BCNK$  - впис. четырехугольник.

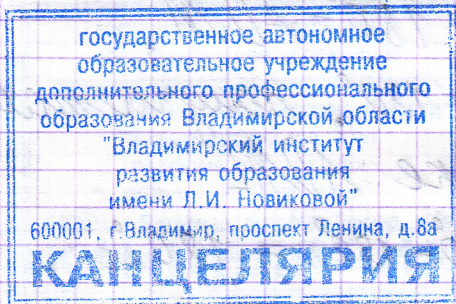
Док-ть:

$ADML$  - вписанный  
четырехугольник.

Чертеж:







М 10 - 8

По всем известной теореме:  
сумма противоположных углов  
у вписанного четырёхугольника равна  
 $180^\circ$ .

$$\begin{aligned} BCK - \text{впис.} &\Rightarrow \angle BCN + \angle NKB = 180^\circ \\ \angle AKB - \text{развернутый} &\Rightarrow \angle AKB = 180^\circ \\ \angle AKB &= \angle AKN + \angle NKB \\ &= \angle NKB + \angle AKN \\ &\text{значит } \angle BCN = \angle AKN \end{aligned}$$

Аналогично  $\angle KBC = \angle KND$ .

$BCML \sim ADNK$  по трём сторонам и  
углам между ними.

$$\left( \begin{aligned} \angle BCN &= \angle AKN; \angle KBC = \angle KND; \\ \frac{KN}{BC} &= \frac{AK}{CM} = \frac{DN}{BL} \end{aligned} \right) \text{ Из подобия: } \angle MLB = \angle ADN; \\ \angle DAK &= \angle LMC.$$



$180^\circ - \angle MLB = \angle ALM = 180^\circ - \angle ADM$ ,  
значит  $\angle ALM + \angle ADM = 180^\circ$ , получается, что  
в четырёхугольнике  $ADML$   
 $\angle DAL + \angle DML = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

Суммы противоположных углов  
в четырёхугольнике  $ADML$  равны  $180^\circ$ ,  
значит  $ADML$  - вписан  
ч.и.т.д.

№ 10.2.

Среди десяти последовательных  
натуральных чисел 5 - четных  
и 5 нечетных и у этих чисел  
гарантировано встречаются прост-  
ые делители: 2, 3, 5, 7.

В эти 10 чисел входит одно  
число, оканчивающееся на 0,  
соответственно оно имеет прост-  
ые делители 2 и 5.

Кратное этого числа с другими



государственное автономное  
образовательное учреждение  
дополнительного профессионального  
образования Владимирской области  
"Владимирский институт  
развития образования  
имени Л.И. Новиковой"

600001, г. Владимир, проспект Ленина, д. 8а

**КАНЦЕЛЯРИЯ**

М 10 - 8

всегда будет оканчиваться на 0,  
так как при умножении на любое  
число даёт 0. Значит второе  
кратное должно оканчиваться на  
6.

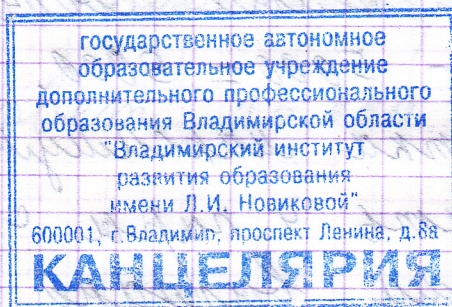
Среди 10 пар чисел 5 имеют  
делитель 2 и 2 имеют делитель 5.  
Чтобы второе кратное оканчива-  
лось на 6, в него обязательно  
должно входить четное число и  
не должно входить второе число,  
которое делится на 5, в противном  
случае последняя цифра второго  
кратного тоже будет 0.  
Из-за того, что по условию



числа последовательны (отличаются на единицу), второе кратное обязательно заканчиваться на 6, общие прочих простых чисел-факторов, четность обоих кратных, единственного варианта распределения трёх из 10 натуральных чисел между кратными и конкретно данными из них 4 последние цифры суммы кратных. Петя не мог выбрать 10 посл. нат. чисел и разделить их на два множества так, чтобы сумма наименьших общих кратных этих множеств оканчивалась на 2016.

Ответ: не может.





№ 10.4.

$n$  - кол-во черных клеток в строке,  
значит мы имеем 100 различных  
 $n$ , при этом  $n$  может принадлежать  
лежать  $[0; 100]$  и сумма всех  
 $n$  делится на 100 без остатка,  
так как во всех столбцах  
равное кол-во клеток (черных).  
Единственное возможное расположе-  
ние, когда отсутствует строка,  
в которой 50 черных клеток,  
так как все ост. строк при перемно-  
жении сложения обр. пары, делящие-  
ся на 100 :  $100 + 0$  ;  $99 + 1$  ; ... ;  $49 + 51$ .  
Значит всего черных клеток



$100 \cdot 50 = 5000$ , а белых соответ-  
ственно  $100 \cdot 100 - 5000 = 5000$ .

Одна черная клетка максимум  
может образовать 4 пары с  
белыми, поэтому выгодно  
расставить клетки так:

n	n	n	n	n	n	n	n
n	n	n	n	n	n	n	n

но во всей таблице их так  
расставить нельзя, так как  
будет полностью черная строка  
и частично-черная, в таких  
строках каждая черн. клетка  
образует 2 пары, таких  
клеток, которые образуют 4 пары  
и 2 пары при оптимальной  
расстановке будет примерно  
поровну, значит  $\frac{2+4}{2} = 3$ .



и кал-бо нар :  $5000 \cdot 3 = 15000$

Омбем: 15 000.